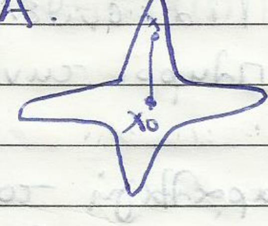
Ορισμός: Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται αστερόσχημο αν ∃ $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x_0 και $x \in A$ να περιέχεται στο A.
(κάθε κυρτό είναι αστερόσχημο)



Το 1ο ΛΗΜΜΑ λοιπόν ισχύει για
$F: A \subset \mathbb{R}^n \to S^1$ και η γωνιακή συνάρτηση
$\varphi: A \to \mathbb{R}$ με $F(x) = (\cos\varphi(x), \sin\varphi(x))$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (u(x), \quad v(x))$
Έπεται εκ (iii).

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα Umlaufsatz:
$C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή ℓ κλειστή μήκους L με φυσική παράμετρο. Τότε $n_C = \pm 1$

Το ευθ. τμήμα με άκρα x_0, x είναι το σύνολο
$\{tx + (1-t)x_0 \,/\, t \in [0,1]\}$

Θεωρώ $x \in A$ και ορίζω την $p_x: [0,1] \to S^1$
$p_x(t) = F(tx + (1-t)x_0)$ Η p_x είναι συνεχής (ως σύνθεση)
Άρα, ∃ συνεχής $\varphi_x: [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε:
$p_x(t) = (\cos\varphi_x(t), \sin\varphi_x(t))$
Θέλω νδο ∃ συνεχής $\varphi: A \to \mathbb{R}$ ε/ω $F(x) = (\cos\varphi(x), \sin\varphi(x))$
για $t=1$ $p_x(1) = F(x) = (\cos\varphi_x(1), \sin\varphi_x(1))$
Άρα, $F(x) = (\cos\varphi_x(1), \sin\varphi_x(1))$
Ορίζω, $\varphi: A \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \varphi_x(1)$.
Θδο φ συνεχής. Θεωρώ $\varepsilon > 0$ αρκούντως μικρό

και $0=t_0<t_1<\dots<t_k=1$ διαμέριση του $[0,1]$ ώστε $\rho_x([t_i,t_{i+1}])$ να περιέχεται σε ένα από τα 4 ημικύκλια.

Έτσι, $\varphi_x(t)=\arctan\dfrac{u_x(t)}{v_x(t)},\ t\in[t_i,t_{i+1}]$ (μια από τις 4 περιπτώσεις)

$\rho_x(t)=F(tx+(1-t)x_0)=$
$=(u_x(t),v_x(t))$
$u_x(t)=u(tx+(1-t)x_0)$
$v_x(t)=v(tx+(1-t)x_0)$

$y\in A$ κοντά στο x

$\varphi(x)-\varphi(y)=\varphi_x(1)-\varphi_y(1)$

$\varphi_y([t_i,t_{i+1}])$

λόγω συνέχειας για y αρκούντως κοντά στο x, έχουμε $\rho_y([t_i,t_{i+1}])$ περιέχεται στο ίδιο ημικύκλιο που περιέχεται το $\rho_x([t_i,t_{i+1}])$.

Άρα, $\varphi_y(t)=\arctan\dfrac{u_y(t)}{v_y(t)}$

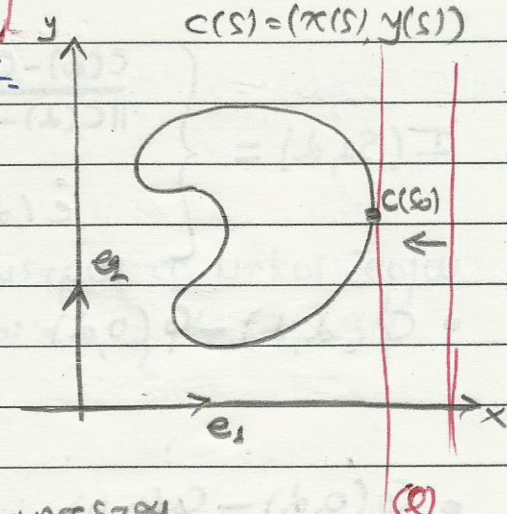
$$\varphi(x)-\varphi(y)=\varphi_x(1)-\varphi_y(1)=\arctan\frac{u_x(1)}{v_x(1)}-\arctan\frac{u_y(1)}{v_y(1)}=$$

$$=\arctan\frac{u(x)}{v(x)}-\arctan\frac{u(y)}{v(y)}\longrightarrow 0$$

Σχόλιο: Έστω F όχι επί
$\psi_k:(\theta_0+2k\pi,\theta_0+2(k+1)\pi)\to S^1\setminus\{(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\}$
$\psi_k(t)=(\cos t,\sin t)$, $\varphi:A\to\mathbb{R}$, $\psi_k^{-1}:S^1\setminus\{\ \}\to(\theta_0+2k\pi,\theta_0+2(k+1)\pi)$
$\varphi=\psi_k^{-1}\circ F$

Άρα, φ συνεχής

Απόδειξη



Θεωρώ $x(s_0)=\max\limits_{s\in[0,L]} x(s)$

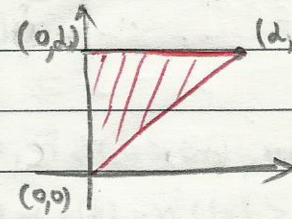
$x(s)=\langle c(s),e_1\rangle$

$e_1=(1,0)$

Η ευθεία (ℓ) εφάπτεται της c στο s_0 αφού $x(s_0)=\max\limits_{s\in\mathbb{R}}\langle c(s),e_1\rangle$ και άρα από Θ. Fermat $\dot{x}(s_0)=0\Leftrightarrow$ $\langle\dot{c}(s_0),e_1\rangle=0\Rightarrow\dot{c}(s_0)=\pm e_2\Rightarrow \ell$ εφάπτεται της c στο s_0. Υποθέτω ότι $s_0=0$.

Ορίζω, $F: A\subset\mathbb{R}^2\to S^1$

$A=\{(s_1,s_2): 0\le s_1\le s_2\le L\}$



$$F(s_1,s_2)=\begin{cases}\dfrac{c(s_2)-c(s_1)}{\|c(s_2)-c(s_1)\|}, & s_1<s_2,\ (s_1,s_2)\neq\bar{0}\\ \dot{c}(s), & s_1=s_2=s\\ -\dot{c}(0), & (s_1,s_2)=(0,L)\end{cases}$$

Ισχυρισμός: Η $F: A \to S^1$ συνεχής

Θα υπολογίσω το όριο:

$$\lim_{(s_1,s_2)\to(0,\alpha)} F(s_1,s_2)$$

Αν $0<s_2<\alpha$ τότε $F(0,s_2) = \frac{c(s_2)-c(0)}{\|c(s_2)-c(0)\|} = \frac{c(s_2)-c(\alpha)}{\|c(s_2)-c(\alpha)\|} =$

$$= \frac{\frac{c(s_2)-c(\alpha)}{s_2-\alpha}}{\frac{\|c(s_2)-c(\alpha)\|}{c_2-\alpha}} = \frac{\frac{c(s_2)-c(\alpha)}{s_2-\alpha}}{\left\|\frac{c(s_2)-c(\alpha)}{s_2-\alpha}\right\|} \xrightarrow{s_2\to\alpha} -\frac{\dot c(\alpha)}{\|\dot c(\alpha)\|} = -\dot c(0)$$

όμοια μπορούν να ελεγχθούν και τα υπόλοιπα

Βάσει του λήμματος αφού F συνεχής ($F: A\to S^1$) είναι συνεχής, υπάρχει $\varphi: A\to\mathbb{R}$ συνεχής και τ/ω

$F(s_1,s_2) = (\cos\varphi(s_1,s_2), \cos\varphi(s_1,s_2))$

όπου αν $s_1=s_2=s$ τότε

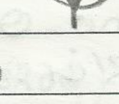
$\dot c(s) = F(s,s) = (\cos\varphi(s,s), \sin\varphi(s,s))$

Άρα

$$m_c = \frac{\overbrace{\varphi(\alpha,\alpha)}^{w(\alpha)} - \overbrace{\varphi(0,0)}^{w(0)}}{2\pi} = \frac{(\varphi(\alpha,\alpha)-\varphi(0,\alpha)) + (\varphi(0,\alpha)-\varphi(0,0))}{2\pi} = 1$$

$$F(s_1,\alpha) = \begin{cases} \frac{c(\alpha)-c(s_1)}{\|c(\alpha)-c(s_1)\|}, & 0<s_1<\alpha,\ (s_1,\alpha)\neq(0,0) \\ \dot c(\alpha), & s_1=\alpha \end{cases}$$

- $\varphi(\alpha,\alpha)-\varphi(0,\alpha)$: μεταβολή της γωνίας για την $F(s_1,\alpha)$, $s_1\in[0,\alpha]$

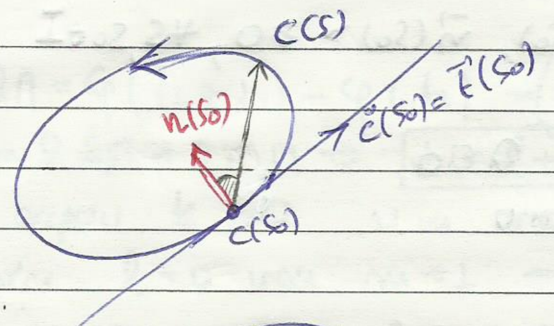


- $\varphi(0,\alpha)-\varphi(0,0)$: μεταβολή της γωνίας για την

$$F(0,s_2) = \begin{cases} \frac{c(s_2)-c(0)}{\|c(s_2)-c(0)\|}, & 0<s_2<\alpha \\ \dot c(0), & s_2=0 \\ -\dot c(0), & s_2=\alpha \end{cases}$$

Κυρτές Καμπύλες :

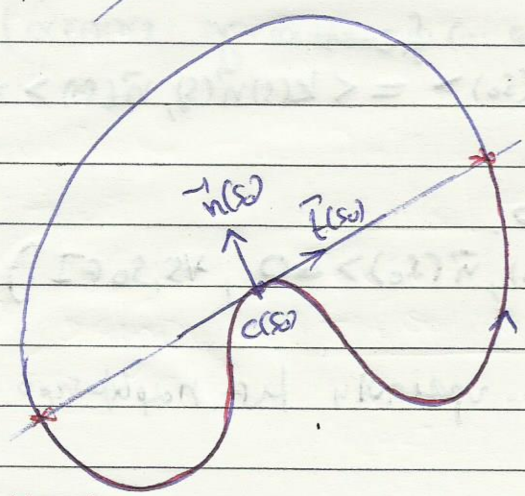
Ορισμός: Μια καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου καλείται κυρτή αν για κάθε $s_0 \in I$ η εφαπτόμενη ευθεία της c στο s_0 αφήνει την καμπύλη σε ένα ακριβώς από τα δυό κλειστά ημιεπίπεδα με ακμή την εφαπτόμενη ευθεία.



$\vec{n}(s_0) = J\vec{t}(s_0)$

$c(s)$ ανήκει στο ημιεπίπεδο που περιέχει το: $\vec{n}(s_0) \Leftrightarrow \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0$,

αφού $\cos\sphericalangle(c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)) = \dfrac{\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle}{\|c(s)-c(s_0)\| \cdot 1}$.



Εδώ πέρα, $\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0$

ΛΗΜΜΑ

Μια καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου είναι κυρτή αν.ν $\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0$, $\forall s, s_0 \in I$ ή $\langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0$, $\forall s, s_0 \in I$

Απόδειξη

$I = I_+ \cup I_-$ όπου

$I_+ = \{ s_0 \in I \,/\, \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \geq 0, \forall s \in I \}$

$I_- = \{ s_0 \in I \,/\, \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0, \forall s \in I \}$

Ένα μόνο από αυτά θα είναι μη κενό

διότι για $s_1 \in I_+$ $s_2 \in I_- \Rightarrow \langle c(s)-c(s_1), \vec{n}(s_1)\rangle \geq 0$ $\forall s$

και $\langle c(s)-c(s_2), \vec{n}(s_2)\rangle \leq 0, \forall s \xRightarrow[\text{τιμή}]{\text{Μέση}} \langle c(s)-c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle = 0, \forall s$

τότε όμως θα ήταν ευθεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Εστω $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το s και καμπυλότητα $k(s)$

i) Αν η c είναι κυρτή, τότε η καμπυλότητα διατηρεί πρόσημο δηλαδή $k(s) \geq 0$ ή $k(s) \leq 0$, $\forall s \in I$

ii) Αν η c είναι απλή κλειστή και η καμπυλότητα k διατηρεί πρόσημο τότε είναι κυρτή

Απόδειξη

i) Εστω ότι ισχύει $\langle c(s) - c(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle \geq 0$, $\forall s, s_0 \in I$

Ορίζω την $f: I \to \mathbb{R}$ τύπου:

$f(s) = \langle c(s) - c(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle$ λεία

$f(s) \geq 0 = f(s_0) \to$ ολικό ελάχιστο

Γνωρίζουμε ότι $\ddot{f}(s_0) \geq 0$.

$\dot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), \vec{n}(s_0) \rangle$

$\ddot{f}(s) = \langle \ddot{c}(s), \vec{n}(s_0) \rangle = \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s_0) \rangle \overset{\text{frenet}}{=} \langle k(s)\vec{n}(s), \vec{n}(s_0) \rangle =$

$= k(s) \langle \vec{n}(s), \vec{n}(s_0) \rangle$.

$s = s_0 \to \ddot{f}(s_0) \geq 0 \Leftrightarrow k(s_0) \geq 0$.

($k(s) \leq 0$ αν $\langle c(s) - c(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle \leq 0$, $\forall s, s_0 \in I$)

ii) Εστω $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή κλειστή καμπύλη με παράμετρο s μήκος l και $k(s) \geq 0$, $\forall s$.

ΘΔΟ είναι κυρτή

Εστω ότι δεν είναι κυρτή

Δηλαδή $\exists s_0$: $f(s) = \langle c(s) - c(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle$

να λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές

Θεωρώ s_1, s_2:

$f(s_1) = \min f$ και $f(s_2) = \max f$

Επειδή, $f(s_1) < 0 = f(s_0) < f(s_2)$

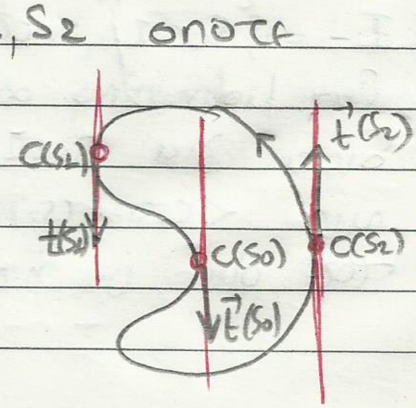
Η f παρουσιάζει ακρότατο στα s_1, s_2 οπότε

$\dot{f}(s_1) = 0 = \dot{f}(s_2)$

$\dot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), \vec{n}(s_0) \rangle = \langle \vec{t}(s), \vec{n}(s_0) \rangle$

$\dot{f}(s_1) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{t}(s_1), \vec{n}(s_0) \rangle = 0$

$\dot{f}(s_2) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{t}(s_2), \vec{n}(s_0) \rangle = 0$



$$\rightarrow \begin{cases} \vec{t}(s_1) = \pm \vec{t}(s_0) \\ \vec{t}(s_2) = \pm \vec{t}(s_0) \end{cases} \Longrightarrow \text{Δύο από τα } \vec{t}(s_0), \vec{t}(s_1), \vec{t}(s_2)$$

είναι ίσα. Συμβολίζω με $t_1, t_2 \in \{s_0, s_1, s_2\}$ για τους οποίους $\vec{t}(t_1) = \vec{t}(t_2) \Rightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = 2m\pi \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Ισχύει το Θεώρημα στρεφόμενης εφαπτομένης (Umlaufsatz)

$$n_c = +1 \rightarrow \varphi(s+L) - \varphi(s) = 2\pi \Rightarrow \varphi(t_1+L) - \varphi(t_1) = 2\pi$$

$$\varphi(t_1+L) - \varphi(t_2) = 2l\pi, \quad \forall l \in \mathbb{Z}$$

Συναληθεύοντα:

$$2\pi = \varphi(t_1+L) - \varphi(t_1) = (\varphi(t_1+L) - \varphi(t_2)) + (\varphi(t_2) - \varphi(t_1)) =$$

$$= 2l\pi + 2m\pi \Rightarrow \boxed{1 = l+m}$$ (άτοπο) αφού πρέπει $m, l > 0$ αφού $k \geq 0$. και τότε $l=0$ και $m=1$ ή $l=1$ και $m=0$

αν $l=0$ και $m=1 \rightarrow \varphi|_{[t_2, t_1+L]}$ σταθερή $\Rightarrow k=0$

(άτοπο γιατί τότε ευθεία)